SESSION 1988 Epreuve n° 1 (Exercices)

Mathématiques

(Options T et TA)

Durée : 4 heures

Les cinq exercices proposés sont indépendants et le candidat est invité à rédiger la solution de chacun d'entre eux sur une feuille séparée.

L'utilisation d'une calculatrice personnelle est autorisée.

Tout document est strictement interdit, y compris la notice d'utilisation de la calculatrice.

EXERCICE - I -

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps des réels, muni de la base (e_1, e_2, e_3).

f et g sont deux endomorphismes de E, de matrices respectives dans cette base :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & 8 \\ -12 & -4 & -9 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1ère Question :

Montrer que f^2 est égal à l'identité. Déterminer les éléments propres de f.

2ème Question :

Prouver que f et g admettent une base commune de vecteurs propres.

Donner une telle base $V = (V_1 , V_2 , V_3)$.

3ème Question :

Soient a et b deux réels quelconques. Trouver les valeurs propres de l'endomorphisme de E, af + bg ; déterminer la matrice de af + bg dans la base V.

4ème Question :

En déduire les fonctions x , y et z définies dans $\left] -\frac{\pi}{2} , +\frac{\pi}{2} \right[$, à valeurs réelles, de la variable réelle u, dérivables, vérifiant le système différentiel (S).

$$(S) \begin{cases} x'(u) = [5 + 4.\tan(u)].x(u) + 2.y(u) + [4 + \tan(u)].z(u) \\ y'(u) = [12 + 6.\tan(u)].x(u) + [3 + 2.\tan(u)].y(u) + [8 + 3.\tan(u)].z(u) \\ z'(u) = -[12 + 6.\tan(u)].x(u) - 4 . y(u) - [9 + \tan(u)].z(u) \end{cases}$$

où tan désigne la fonction tangente.

EXERCICE - II -

On admet l'existence et l'unicité de la fonction $f : [0 , \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, vérifiant la relation (E) ci-dessous :

$$(E) \left| \begin{array}{l} \text{pour tout } x \text{ tel que } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ \pi.f(x) + \cos(x).\displaystyle\int_0^{\pi} f(u).\cos(u)\ du + \sin(x).\int_0^{\pi} f(u).\sin(u)\ du = \frac{\pi^2 - x^2}{\pi} \end{array} \right.$$

On se propose de résoudre de façon approchée l'équation (E) en la remplaçant par un système linéaire (S) obtenu par le procédé suivant :

a) Les inconnues sont les valeurs $y_k = f(x_k)$

où $x_k = \frac{k.\pi}{3}$, k étant élément de l'ensemble { 0 , 1 , 2 , 3 }

b) Les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} f(u).\cos(u)\ du$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} f(u).\sin(u)\ du$ sont remplacées en fonction de y_0 , y_1 , y_2 , y_3 par les valeurs approchées obtenues en utilisant la méthode des trapèzes sur la subdivision (x_0 , x_1 , x_2 , x_3) de $[0 , \pi]$.

c) La relation (E) ainsi transformée est écrite aux points x_0 , x_1 , x_2 , x_3 .

1ère Question :

Etablir le système (S).

2ème Question :

Résoudre (S) par manipulations de lignes. Les calculs intermédiaires figureront sur la copie.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE - III -

a et b sont deux réels donnés vérifiant $0 < b.\sqrt{2} < a$.

E désigne un espace affine euclidien réel orienté de dimension 3 rapporté au repère $(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ orthonormal direct.

Un point M est déterminé par ses coordonnées x , y , z :

$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

Soit Δ l'ensemble des points M de E dont les coordonnées x , y et z vérifient :

$$\begin{cases} x = [\, a + r.\sqrt{2} \,.\cos(u)\,].\cos(v) \\ y = [\, a + r.\sqrt{2} \,.\cos(u)\,].\sin(v) \\ z = r.\sin(u) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant b \\ 0 \leqslant u \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi \end{cases}$$

1ère Question :

Représenter la section de Δ par un plan contenant Oz et la section de Δ par un plan parallèle au plan xOy .

Quelle est la nature géométrique de Δ ?

2ème Question :

Calculer le volume de Δ et l'intégrale triple $F = \iiint_{\Delta} z^2 \, dx \, dy \, dz$

EXERCICE - IV -

Soit f_0 l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$f_0(t) = 1$ si $0 \leqslant t \leqslant 1$

$f_0(t) = 0$ si $t < 0$ ou $t > 1$

1ère Question :

Pour x réel quelconque, l'application g_x, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est définie par :

$g_x(t) = f_0(x - t)$. Représenter graphiquement f_0 et g_x.

2ème Question :

Les applications f_1 et f_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont définies par :

$$f_1(x) = \int_0^x g_x(t).f_0(t)\,dt \quad \text{et} \quad f_2(x) = \int_0^x g_x(t).f_1(t)\,dt$$

Représenter graphiquement les fonctions f_1 , f_2 .

Vérifier que pour $2 \leqslant x \leqslant 3$ $\quad f_2(x) = \dfrac{(3 - x)^2}{2}$

3ème Question :

Soit la fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π, paire et telle que pour tout u vérifiant $2\pi \leqslant u \leqslant 3\pi$ $\quad h(u) = f_2(\frac{u}{\pi})$. Représenter graphiquement h.

Etablir la série de Fourier de h : étudier sa convergence.

En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^p}{p^2}$

EXERCICE - V -

Soit $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longrightarrow f(x,y) = \left(x^2 + 2\,y^2 \right)^{-(x^2 + y^2)}$$

1ère Question :

Montrer que la fonction f peut être prolongée par continuité au point (0,0). Soit g le prolongement obtenu.

2ème Question :

Vérifier que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Donner la différentielle de g au point (0,0).

3ème Question :

La fonction g est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

4ème Question :

Rechercher les extrémums locaux de g, restreinte au domaine de $\mathbb{R}^2$ sur lequel elle est de classe $\mathcal{C}^2$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail